Επίλεκτα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα για την διδασκαλία εννοιών του Απειροστικού Λογισμού

Του Γιάννη Π. Πλατάρου
M.edu Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών



Εκτός από τις προτάσεις και τα θεωρήματα των μαθηματικών, στα καλά διδακτικά βιβλία, υπάρχουν παράλληλα κάποιες παρατηρήσεις των συγγραφέων που τιτλοφορούνται είτε ως **«Σχόλιο»** είτε ως **«παρατήρηση»** είτε ως **«προσοχή!»** είτε ως **«επισήμανση»** Όλες αυτές οι καταγραφές, είτε ως **υποσημειώσεις** στο περιθώριο της σελίδας, είτε ως **σημειώσεις μέσα σε ξεχωριστό πλαίσιο** για να δοθεί αναγκαία έμφαση, **διευκρινίζουν σκοτεινά σημεία της θεωρίας,** σημεία στα οποία ο **αναγνώστης εύκολα μπορεί να κάνει λάθος**, είτε **εύκολα να παρανοήσει**. Η εμπειρία του συγγραφέως, ο οποίος κατά κανόνα είναι και δάσκαλος των μαθηματικών, του επιβάλλει να πει το κάτι παραπάνω, κάτι το εμφαντικό, αυτό που ίσως προλάβει ένα πιθανό λάθος, μια λανθασμένη νοητική εικόνα, καθοδηγούμενος από τις εμπειρίες , τις προσωπικές του , των μαθητών του , αλλά και από μια τεράστια βιβλιογραφία που έχει σχηματισθεί από συζητήσεις της μαθηματικής κοινότητας για **«συνήθη λάθη»** , **«συνήθεις παρανοήσεις»**, **γνωστά ιστορικά λάθη**, **«επιστημολογικά εμπόδια»** που κατά την διδασκαλία τα λέμε και **«διδακτικά εμπόδια».**

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε, επίλεκτα παραδείγματα που υπακούουν στα προηγούμενα και πιστεύουμε, ότι θα είναι χρήσιμα σε κάθε μαχόμενο συνάδελφο του πίνακα για να τα έχει ως άμεσα όπλα απόδειξης πειθούς και πρόληψης λανθασμένου νοητικού μοντέλου για κάποια λεπτή έννοια, κατά την διαδικασία δόμησης της γνώσης των μαθητών του.

Τα παραδείγματα που παρουσιάζουμε, βαίνουν κλιμακωτά και καλύπτουν όλο το φάσμα του Απειροστικού Λογισμού που διδάσκεται στην Γ' Λυκείου ,με κάποιες μικρές παρεκβάσεις. Ας μην ξεχνάμε, ότι η Ανάλυση της Γ' Λυκείου, εξετάζει τις συναρτήσεις που ορίζονται **μόνο** σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αυτός ο περιορισμός , αφήνει απ' έξω όλες τις άλλες συναρτήσεις. Επίσης, η έννοια της συνέχειας έχει νόημα έτσι όπως ορίζεται, μόνο σε σημεία συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, ενώ και οι έχουσες μεμονωμένα σημεία συναρτήσεις , σύμφωνα με τους ορισμούς των Πανεπιστημιακών συγγραμμάτων είναι συνεχείς (λ.χ. όλες οι ακολουθίες, είναι συνεχείς συναρτήσεις) Αυτό το θέμα , ναι μεν δεν το αγγίζουμε, αλλά πρέπει να το έχουμε κατά νου , προς αποφυγήν λανθασμένων γενικεύσεων, όπως θα δούμε σε ορισμένα παραδείγματα παρακάτω:

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ . ΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΑΡΡΗΤΟΙ.

Είναι αληθές, ότι κάθε πραγματικός αριθμός, έχει μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση;

Απάντηση: Δεν είναι αληθές. Κάθε άρρητος, έχει πράγματι μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση, την οποία όμως γνωρίζει μόνον ο …Θεός! Όσον αφορά όμως τους ρητούς, έχομε, ότι κάθε ρητός, έχει δύο ισοδύναμες δεκαδικές αναπαραστάσεις. Παραδείγματα:

$2 = 1,9999...$ ή 17,23999999999….=17,24

Η απόδειξη των παραπάνω, μπορεί να γίνει είτε με μαθηματικά της Β' Γυμνασίου είτε της Β' Λυκείου

λ.χ.: Αν $a = 1,99999......$ τότε

$10a = 19,99999 \Rightarrow 9a = 18,00000... \Rightarrow a = 2$ **Ή 17,23999…=17,23+**

$$\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + ... \underbrace{=}_{\varphi\theta.\gamma\varepsilon\omega\mu.\pi\rho\acute{o}o\delta o\varsigma} 17,23 + \frac{\frac{9}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = 17,23 + \frac{9}{10^4} = 1,24$$

Να δοθούν παραδείγματα , όπου:
i) άρρητος + άρρητος = ρητός ii) άρρητος – άρρητος = ρητός iii) άρρητος άρρητος = ρητός iv) άρρητος : άρρητος = ρητό

Απάντηση:

i) $(\sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 2$ ii) $(\sqrt{2} + 2) - (\sqrt{2}) = 2$ iii) $(\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{2}) = 4$ iv) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Στα παραπάνω, θεωρείται γνωστό, ότι $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Πέραν των προηγουμένων παραδειγμάτων, υπάρχει και η κατασκευαστική λογική, όπως παρακάτω:

i) Αν $\alpha = 1,1010010001000010000010000001...$ τότε ο a είναι άρρητος αφού έχει απειροψήφια μη περιοδική παράσταση.

Ομοίως ο $\beta = 1,0101101110111101111110...$ είναι άρρητος για τον ίδιο λόγο.

Και $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2,111111... \\ 10(\alpha + \beta) &= 21,111111... \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ (με αφαίρεση κατά μέλη)

$9(\alpha + \beta) = 19 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{19}{9}$ (ρητος)

ii) Αν $\alpha = 2,101001000100001000001...$ (άρρητος)

$\beta = 1,101001000100001000001...$ (άρρητος)

Τότε $\alpha - \beta = 1$ (ρητός).

iii) Αφού $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$ και το ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$ θεωρείται «γνωστό»[1], τότε $0,4142... \cdot 2,4142... = 1$.

---

[1] « Γνωστό» υπό την έννοια ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε οποιοδήποτε αρχικό πεπερασμένο τμήμα των άπειρων ψηφίων του, με πεπερασμένα βήματα. Το σύνολο των θέσεων των ψηφίων του δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε (πλην του…Θεού!) γι' αυτό άλλωστε ονομάζεται και *άρρητος* (= δεν μπορεί να εκφρασθεί). Αλλά είδαμε ότι υπάρχουν και άρρητοι που "εκφράζονται", όπως ο α και ο β των παραδειγμάτων που έχουν μια **τυπική κανονικότητα** στα άπειρα μη περιοδικά ψηφία τους.

iv) Έχω ότι: $1=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα, γνωστού όντος του αναπτύγματος του $\sqrt{2}$, είναι γνωστό και το $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ που προκύπτει με τον αλγόριθμο (απείρων βημάτων όμως!) της διαίρεσης με το 2 και άρα $1,4142...\ x\ 0,707...=1$.

Είναι αληθές ότι οι πλέον συνηθισμένοι ρητοί αριθμοί που υπάρχουν είναι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή;

Απάντηση: Όχι. Όλοι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι οι ρητοί της μορφής $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$, με μ,ν στο ℕ και $(\alpha,2^{\mu}\cdot 5^{\nu})=1$ **και μόνον *αυτοί.***

Πράγματι: Αν υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι μ>ν , τότε, $\frac{\alpha}{2^{\mu}\times 5^{\nu}}=\frac{\alpha\times 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\times 5^{\nu}\times 5^{\mu-\nu}}=\frac{\alpha\times 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu}\times 5^{\mu}}=\frac{\alpha\times 5^{\mu-\nu}}{10^{\mu}}$ Το τελευταίο κλάσμα, γράφεται ως δεκαδικός τερματιζόμενος κατά τα γνωστά, μετρώντας μ θέσεις για την υποδιαστολή, αριστερά του τελευταίου ψηφίου του ακέραιου $\alpha\times 5^{\mu-\nu}$.

Αντιστρόφως: Κάθε δεκαδικός, γράφεται ως άθροισμα κλασμάτων με παρονομαστή δύναμη του 10 , όπου αν κάνω την άρθροιση, θα έχω κλάσμα με παρονομαστή δύναμη του 10 και οι όροι θα είναι πρώτοι μεταξύ τους. Το αντίστροφο συμπληρώνεται, με την απόδειξη, ότι το αρχικό κλάσμα δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με άλλο που να έχει ο παρονομαστής άλλη ανάπτυξη πρώτων, λόγω της μοναδικότητας ανάπτυξης κάθε ακεραίου σε γινόμενο πρώτων. Έτσι έχομε, ότι η κλάση των δεκαδικών , ως σύνολο είναι μεν απειροσύνολο (στην ζωή μας πάντα πεπερασμένο) αλλά ως κλάση των ρητών αποτελεί μια απειροστή κλάση αυτών, πράγμα που διαισθητικά γίνεται αντιληπτό από τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο παρονομαστής καθώς μπορεί να διατρέξει όλους τους συνδυασμούς των απείρων το πλήθος, πρώτων.

Ως διαισθητική προσέγγιση, μπορούμε να πούμε, ότι αν πάρουμε ένα πρότυπο μέτρο μήκους , που να παριστάνει το διάστημα [0,1], όταν το χωρίζουμε σε 10, 100, 1000, κ.ο.κ. κομμάτια, εκεί έχουμε θέσεις δεκαδικών τερματιζόμενων και παντού αλλού μη τερματιζομένων κα αρρήτων[2].

Εν κατακλείδι έχουμε:

Δεκαδικοί τερματιζόμενοι: $\frac{\alpha}{2^{\mu}\times 5^{\nu}},\ \begin{matrix}\alpha\in\mathbb{Z}\\ \mu,\nu\in\mathbb{N},\text{με}\ (\alpha,2^{\mu}\times 5^{\nu})=1\end{matrix}$

Ρητοί : $\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\ \text{και}\ \beta\neq 0$.

Μπορούμε να πούμε (διαισθητικά πάντα) ότι «**Σχεδόν όλοι οι ρητοί, είναι δεκαδικοί περιοδικοί**».

---

[2] Κατά την γνώμη μας, καλό θα ήταν ο διδάσκων να πει δύο πράγματα για τα απειροσύνολα, την απαρίθμηση και το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor, για να δείξει την ποιοτική διαφορά του απείρου της αριθμησιμότητας των ρητών και του υπεραριθμησίμου των αρρήτων. Μπορούν να παρουσιασθούν σε μια διδακτική ώρα, ακόμα και στην Α΄ Λυκείου, όσο κι αν φαίνεται λίγο τολμηρό , αρκεί να υπάρχει ο κατάλληλος σχεδιασμός.

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν ταυτόσημες αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι ίσες;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.:

$f(x) = 2x/\{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x/[-1,1]$

Προφανώς $f \neq g$ αφού $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι πάντα διαφορετικές;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.

$f(x) = 2x/\{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x^3/\{-1,0,1\}$

Ισχύει $f = g$, ενώ οι αναλυτικές εκφράσεις είναι διαφορετικές.

Εάν $f(x)\cdot g(x) = 0\ \forall x \in A$, όπου A το κοινό πεδίο ορισμού των f,g, τότε μια τουλάχιστον από τις f,g είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.

Αν $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

τότε $f(x)\cdot g(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ χωρίς καμία να είναι σταθερή.

Επιπλέον, το αντιπαράδειγμα των f,g είναι τέτοιο ώστε να πληροί και την επιπρόσθετη προϋπόθεση ότι **«δεν υπάρχει υποδιάστημα στο πεδίο ορισμού της f είτε της g που ο περιορισμός της f ή της g αντιστοίχως, να είναι η μηδενική συνάρτηση».**

Να αποδειχθεί η ισχύς ή η μη ισχύς εν γένει, των ισοτήτων:

α) $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$

β) $(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$

όπου f,g,h **:συναρτήσεις** $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$**.**

Απάντηση: **Η α) δεν ισχύει πάντα, ενώ η β) ισχύει πάντα! Πράγματι:**

α) Αν θεωρήσω: $f(x) = x^2$, $h(x) = 1$, $g(x) = 1$. Τότε

$[f\circ(g+h)](x) = f(g(x)+h(x)) = f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4$

$[(g+h)\circ f](x) = (g+h)(f(x) = (g+h)(x^2) = g(x^2)+h(x^2) = 1^2+1^2 = 2.$

β) Ισχύει πάντα: Πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$[(g+h)\circ f](x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x))+h(f(x))$

$= h(f(x))+g(f(x)) = (h+g)(f(x)) = [(h+g)\circ f](x)$

Να παρατεθούν εκφράσεις με όρια, οι οποίες στερούνται νοήματος ορίου, λόγω μορφής του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων.

Απάντηση: α) Η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2 - x + 1} - x\right)$, $\alpha < 0$ δεν έχει νόημα ορίου, διότι το τριώνυμο $\alpha x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 4\alpha > 0$ άρα έχει δύο διακεκριμένες ρίζες πραγματικές , ρ_1, ρ_2, και η συνάρτηση έχει π.ο. $\mathcal{D}(f) = [\rho_1, \rho_2]$. Το $-\infty$ δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$, άρα δεν έχει νόημα ορίου η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2 - x + 1} - x\right)$, $\alpha < 0$.

β) Αν $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x - a}$,

τότε: η έκφραση $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ δεν έχει νόημα, διότι το -∞ δεν είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}$, τότε για να ορίζεται η συνάρτηση , πρέπει $(x-1\geq 0)$ και $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\{1\}\cup[2,+\infty)=\mathcal{D}(f)$.

Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ στερείται νοήματος, διότι το 1 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

δ) Αν $f(x)=\log\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$. Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ επίσης στερείται νοήματος, διότι $\mathcal{D}(f)=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ και το 1 δεν ανήκει στο πεδίο του ορισμού της.

Τα παραπάνω παραδείγματα, εξηγούν πειστικά, γιατί η πρώτη μας ενέργεια πριν την εύρεση ενός ορίου, είναι η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Ένας φοιτητής που προγυμνάζει έναν υποψήφιο , του δίνει την εξής ρητή οδηγία: «Πριν ασχοληθούμε με τον υπολογισμό ενός ορίου του τύπου $x\to a\in\mathbb{R}$, η πρώτη μας δουλειά είναι να δοκιμάσουμε αν υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για χ=α»
Κατά πόσον είναι εύστοχη η υπόδειξή του;

Απάντηση: Είναι λανθασμένη. Η πρώτη μας δουλειά είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το κατά πόσον το α είναι ή όχι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f .

Στην περίπτωση γ) του προηγούμενου ζητήματος, για χ=1 έχω f(x)=0. Παρ' όλα αυτά, ο όριο της f στο 1 , δεν έχει νόημα.

Να αποδειχθεί ότι <u>όλες</u> οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς!
Αν τότε .
Αν η f δεν ορίζεται για , τότε το δεν υπάρχει.
Αν και , τότε .
Αν , τότε και .
(v) Αν που ανήκουν στο κοινό πεδίο ορισμού τους , και , τότε .

Απάντηση: (i) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και $f(0)=0\neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(ii) Δεν είναι αληθής.

π.χ. : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}/\mathbb{R}-\{0\}$

Στο 0 η f δεν ορίζεται, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

(iii) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x)=\frac{2}{x^2}, g(x)=\frac{1}{x^2}, x_0=0$

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\neq 0$.

(iv) Δεν είναι αληθής.

π.χ. $f(x)=\begin{cases}1,\text{αν} & x\in[0,1]\\ -1,\text{αν} & x\in[-1,0)\end{cases}$, $|f(x)|=1\quad \forall x\in[-1,1]$.

$\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=1$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ δεν υπάρχει.

(v) $f(x)=0\,/(0,+\infty)$, $g(x)=x^2\,/,(0,+\infty)$ $f(x)<g(x)\ \forall x\in(0,+\infty)$, αλλά $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ψευδής:
«Αν μια συνάρτηση *f* είναι ασυνεχής στο x_0 τότε και ο περιορισμός της *f* σε κάθε διάστημα που περιέχει το x_0 θα είναι επίσης ασυνεχής».

Απάντηση: Για τη συνάρτηση *f*:

$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{αν}\quad x<0\\ 1 & \text{αν}\quad x\geq 0\end{cases}$ έχω $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1=f(0)$.

Δηλαδή η *f* δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά αν θεωρήσω τον περιορισμό $g=f\,/[0,+\infty)$ έχω ότι

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1=g(0)$.

Επομένως, η πρόταση είναι ψευδής.

Να αποδείξετε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα ότι η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ στο θεώρημα Bolzano, είναι ουσιώδης ώστε να ισχύει το συμπέρασμά του.
Συγκεκριμένα:
(i) **Η υπόθεση της συνέχειας της f στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ απολύτως αναγκαία**
(ii) **Επίσης η συνέχεια στα άκρα *α* και *β*.**

Απάντηση: Η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι ουσιώδης, διότι έστω και σε ένα σημείο x_0 του $[\alpha,\beta]$ να μη είναι συνεχής η *f*, είναι δυνατόν να μην ισχύει το συμπέρασμα της ύπαρξης ρίζας της $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$.

(i) Έστω $f: f(x)=\begin{cases}-2, & \text{αν}\quad x\in[-1,0)\\ 1, & \text{αν}\quad x=0\\ 2, & \text{αν}\quad x\in(0,1]\end{cases}$ -

Για την *f* ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο κλειστό $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1)=(-2)(+2)=-4<0$

- Είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$, αφού

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = +2 \neq 1 = f(0)$

- Είναι συνεχής $\forall\ x_0 \in [-1,1]\setminus\{0\}$.

Όμως $\nexists\ x \in [-1,1]: f(x) = 0$ μιας και η f εξ ορισμού είναι διάφορη του μηδενός για κάθε $x \in [-1,1]$.

(ii) Για την ασυνέχεια στα άκρα:

Θεωρώ την συνάρτηση $g: g(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν} \quad x \in [-1,1) \\ -2, & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$.

Για την g ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1) = 2\cdot(-2) = -4 < 0$
- Είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, διότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq -2 = f(1)$
- Είναι συνεχής $\forall\ x \in [-1,1)$.

Όμως (επίσης εξ ορισμού) $f(x) \neq 0\ \forall\ x \in [-1,1]$.

Ανάλογο αντιπαράδειγμα μπορούμε να παραθέσουμε και για ασυνέχεια στο αριστερό άκρο του διαστήματος.

Υπάρχει παράδειγμα συναρτήσεως που δεν πληροί τις συνθήκες της υποθέσεως του Θ. Bolzano, «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*» ενώ παράλληλα , πληροί το συμπέρασμα, επίσης «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*».

<u>Απάντηση</u>: «Ιδανικό παράδειγμα» αποτελεί η συνάρτηση του Dirichlet.

$f: f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Γι' αυτήν ισχύει:

- $f(\alpha)\cdot f(\beta) \geq 0\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (Δηλαδή η άρνηση της συνθήκης $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$)
- Η f ασυνεχής $\forall\ x_0 \in [\alpha,\beta]$ (Δηλαδή δεν είναι συνεχής ούτε σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της , αυτό απαιτεί τον ακολουθιακό ορισμό της σύγκλισης και εκφεύγει των πλαισίων της Γ' Λυκείου)

Ως αντίστοιχο «συμπέρασμα» έχουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει άπειρες ρίζες στο πεδίο ορισμού της και μάλιστα υπεραριθμήσιμες!

Μάλιστα, και το πεδίο ορισμού μπορεί να εκληφθεί απεριόριστα μικρό (δηλαδή $\beta - \alpha < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$) χωρίς να επηρεάζονται αυτά που ισχύουν για την συνανάρτηση αυτή.

Δίνεται η πρόταση: «Αν η συνάρτηση *f* , είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) τότε η *f* έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο στο (α,β) Αν είναι αληθής να αποδειχθεί, αν είναι ψευδής να αποδειχθεί η αναλήθειά της με κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Απάντηση: Είναι ψευδής, αφού αυτή η πρόταση είναι αληθής μόνο για κλειστά διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$. Παράδειγμα, η $f: f(x)=\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}\Big/(\alpha,\beta)$.

Για την f ισχύουν:

- $f(x)<0\ \forall\ x\in(\alpha,\beta)$ και συνεχής στο αυτό.
- Στην θέση $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ έχω ολικό μέγιστο, δηλαδή $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f(x)\ \forall\ x\in(\alpha,\beta)$
- $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

Δηλαδή η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, έχει μέγιστο, αλλά δεν έχει ελάχιστο. Συνεπώς η πρόταση είναι ψευδής, αφού βρήκαμε συνάρτηση πληρούσα τις υποθέσεις της προτάσεως, αλλά όχι το συμπέρασμά της.

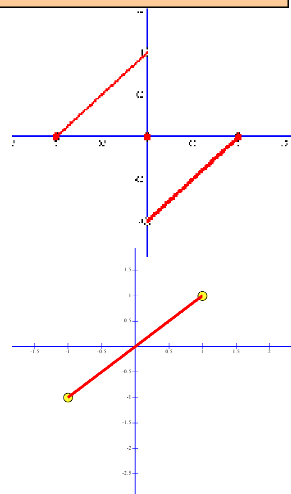
Ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι η $g: g(x)=\text{εφ}x\Big/\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία:

- Είναι συνεχής σε κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
- Δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο, καθώς $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=+\infty$. Δηλαδή δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη.

Είναι γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα απόλυτο ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.»
Να αποδείξετε τα εξής:

1) Η προϋπόθεση της συνέχειας στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ είναι απαραίτητη για την ισχύ του θεωρήματος
2) Η προϋπόθεση της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος είναι επίσης απαραίτητη.
3) Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

Απάντηση : 1)Έστω $f: f(x)=\begin{cases} x+1, \text{αν} & x\in[-1,0) \\ 0 \ \text{αν} & x=0 \\ x-1 \ \text{αν} & x\in(0,1] \end{cases}$.



Η f είναι ασυνεχής μόνο στο σημείο $x_0=0$, διότι $f(0)=0\neq\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1\neq1=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ και ως έχουσα πολυωνυμικούς κλάδους είναι συνεχής στα διαστήματα που ορίζονται αυτοί.

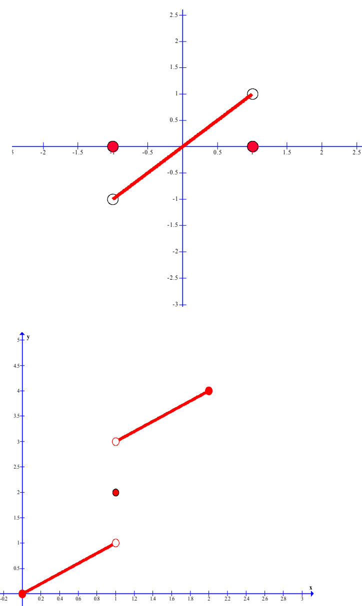
Η f δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, και γι' αυτό αρκούσε η ασυνέχεια σε ένα μόνο σημείο του πεδίου ορισμού της.

Πράγματι, το πεδίο τιμών της είναι το $(-1,1)$ το οποίο ως ανοικτό, δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.

2)Έστω $g: g(x) = x/(-1,1)$. Η f συνεχής $\forall x \in (-1,1)$ αλλά το πεδίο τιμών της είναι επίσης το $(-1,1)$ όπου εκεί δεν έχω ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Επίσης η $g/[-1,1)$ έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο όπως και η $g/(-1,1]$ έχει μέγιστο, αλλά όχι ελάχιστο.

Επίσης αν $h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (-1,1) \\ 0, & x = -1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $[-1,1]$ και δεν έχει επίσης μέγιστο ή ελάχιστο.



3)Η συνάρτηση $\varphi : \varphi(x) = \begin{cases} x & \alpha\nu \quad x \in [0,1) \\ 2 & \alpha\nu \quad x = 1 \\ x + 2 & \alpha\nu \quad x \in (1,2] \end{cases}$

Στο $f(2) = 4$ έχω ολικό μέγιστο

$f(0) = 0$ έχω ολικό ελάχιστο και στο 1 έχω ασυνέχεια.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Αν στο γράφημα μίας συνάρτησης υπάρχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη παντού;

Απάντηση: Όχι πάντα. Ενδέχεται να υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία σε κάποιο σημείο του γραφήματος μιας συνάρτησης, αλλά στο σημείο εκείνο να μην υπάρχει η παράγωγος, διότι δεν είναι πραγματικός αριθμός και είναι $+\infty$ ή $-\infty$ η οριακή τιμή του λόγου μεταβολής της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

Αν $f : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt[3]{x}$, τότε

$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$ και η ευθεία *x=0* (η κλίση $+\infty$ που βρήκαμε εφάπτεται του διαγράμματος της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο σημείο (0,0) εις το οποίο δεν θεωρείται παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη), αλλά ως έχουσα **«κατ' εκδοχήν» παράγωγο** το $+\infty$.

Το γράφημα μια συνάρτησης είναι απολύτως «λείο», δεν έχει «ακίδες», οξείες, ορθές ή αμβλείες γωνίες, ευθύγραμμες ή καμπυλόγραμμες, ενώ σε κάθε σημείο του, υπάρχει εφαπτομένη ευθεία. Όμως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη! Πως μπορεί αυτό να είναι δυνατόν;

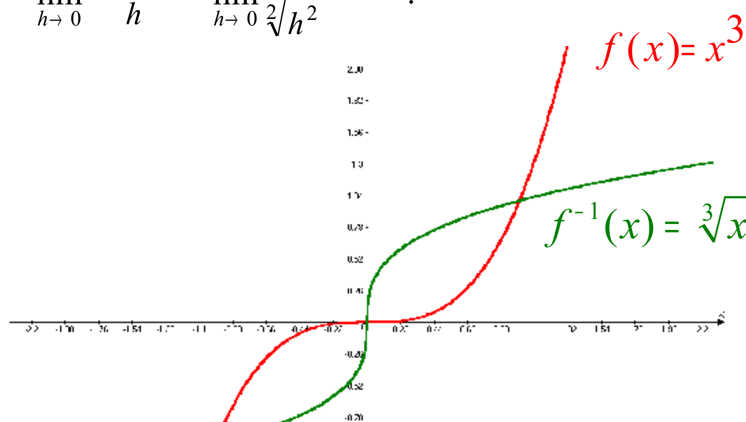
Απάντηση: Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$, είναι παντού παραγωγίσιμη.

Το γράφημα της επόμενης είναι παντού «λείο» και υπάρχει παντού εφαπτομένη ευθεία.
Το συμμετρικό του γραφήματος ως προς την ευθεία $y = x$, ως γνωστόν είναι αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (θεωρούμε ότι το x παίρνει και αρνητικές τιμές, άλλως ορίζουμε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν \quad x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & αν \quad x < 0 \end{cases}$.

Το γράφημα της f^{-1}, λόγω συμμετρίας, έχει τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες με το γράφημα της f.

Όμως, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$.

Δηλαδή, η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. (Είναι μόνο «κατ' εκδοχήν» παραγωγίσιμη).

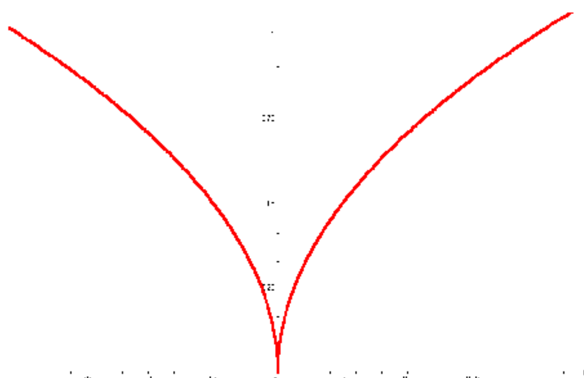


Ένας φοιτητής, επικαλούμενος το προηγούμενο παράδειγμα, έχει τη γνώμη, ότι η έννοια της παραγώγου είναι «ανεπαρκώς ορισμένη». Ισχυρίζεται ότι θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος, ώστε για κάθε συνάρτηση (όπως και για την $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$) να υπάρχει η έννοια της παραγώγου σε κάθε σημείο της, εάν και μόνο εάν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία σε αυτό το σημείο της. Ισχυρίζεται, ότι με αυτό τον τρόπο καλύπτουμε την παραγωγισιμότητα της $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ σε κάθε σημείο της, πράγμα που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με την γεωμετρική εποπτεία και την αίσθηση του «λείου» γραφήματος
Υπάρχει αντιπαράδειγμα που να κλονίζει την πίστη και τους ισχυρισμούς του φοιτητή;

Απάντηση: Αντιπαράδειγμα μπορεί να είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Στο σημείο 0 υπάρχει μοναδική εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης ο άξονας yy' καθώς $f'_{\alpha}(0) = -\infty$, $f'(\delta) = +\infty$.

Εδώ και υπάρχει μοναδική ευθεία εφαπτομένη (με την εκ δεξιών και εξ αριστερών έννοια), αλλά δεν έχω κατ' ουδένα τρόπο «λεία συνάρτηση», αφού στο 0 έχω μια ένωση **δύο οιονεί**



«κερατοειδών γωνιών». Παράγωγο στο 0 δεν έχουμε, πράγμα που συμφωνεί με την εποπτεία και αντιβαίνει στην ιδέα της μοναδικής εφαπτομένης ευθείας. Αξίζει να σημειωθεί, ότι στο 0 δεν υπάρχει ούτε «κατ' εκδοχήν» παράγωγος, αφού οι εκ δεξιών και εξ αριστερών οριακές τιμές της παραγώγου είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντιστοίχως.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Το θεώρημα Rolle έχει ως εξής: «Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $\exists$ ένα τουλάχιστον ξ του (α,β), ώστε $f'(\xi)=0$».

Να αποδείξετε με χρήση τουλάχιστον αντιπαραδειγμάτων τα παρακάτω:

(i) Η προϋπόθεση της συνέχειας είναι εντελώς απαραίτητη.

(ii) Η προϋπόθεση της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι εντελώς απαραίτητη.

(iii) **Η συνέχεια πρέπει να είναι $[\alpha,\beta]$ και όχι σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta)$.**

(iv) **Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.**

(v) **Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$ είναι απαραίτητη.**

(vi) **Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για να ισχύει το συμπέρασμα, αλλά όχι και αναγκαίες.** [3]

Απάντηση: (i) Έστω και σε ένα σημείο να είναι ασυνεχής η f, είναι δυνατόν να μην ισχύει το συμπέρασμα του Θ. Rolle, α.χ.

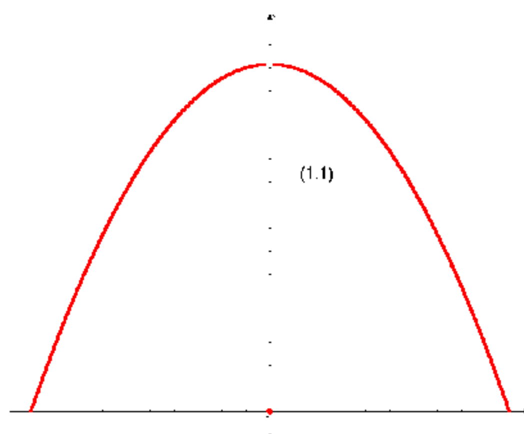
Αν

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{αν } x\in[-1,1]-\{0\}\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

τότε η f

- Είναι ασυνεχής στο 0 και συνεχής στο $[-1,1]-\{0\}$.
- $f(-1)=f(1)=0$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]-\{0\}$.

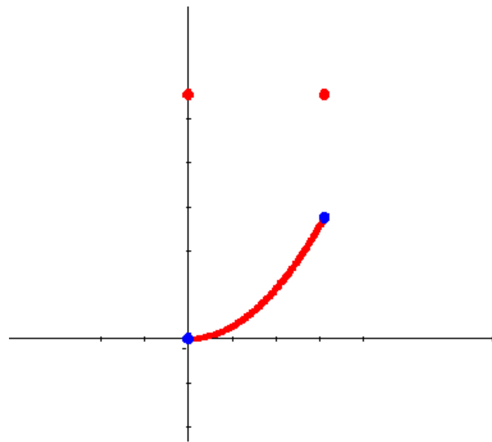
Δηλαδή, πληρούνται όλες οι συνθήκες του Θ. Rolle, πλην της ασυνεχείας σε ένα και μοναδικό σημείο.



Έτσι όμως, $\nexists\ x_0\in[-1,1]: f'(x_0)=0$, διότι αν υποθέσουμε ότι υπήρχε τέτοιο x_0, θα επαλήθευε την εξίσωση $f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0=0 \Rightarrow x_0=0$, άτοπο, διότι στο $x_0=0$ είναι ασυνεχής, άρα στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη.

[3] Αναλόγως και για το Θ.Μ.Τ.

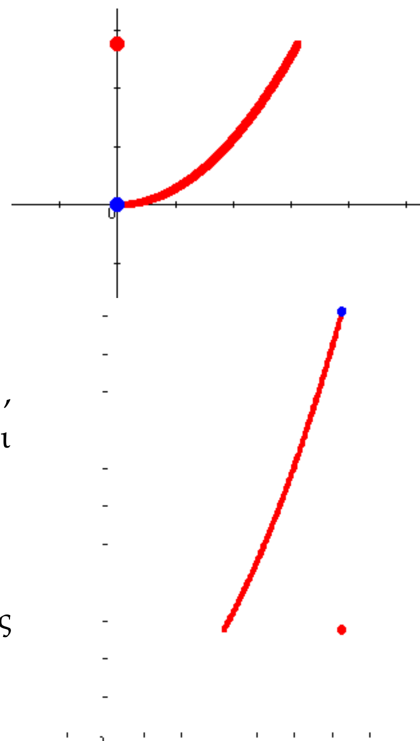
(ii) Η $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{αν} & x\in(0,1) \\ 2, \text{αν} & x\in\{0,1\} \end{cases}$



- Δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[0,1]$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(0,1)$.
- Ισχύει $f(0)=f(1)=2$.

Αλλά, $\nexists\ x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$. Διότι αν υπήρχε τέτοιο x_0, θα έπρεπε να είναι $x_0=0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

(iii) Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0,1] \\ 1, & x=0 \end{cases}$ τότε



- Η f ασυνεχής στο 0, άρα και μη παραγωγίσιμη.
- $f(0)=f(1)=1$.
- Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.

Αλλά, $\nexists\ x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=0$, διότι μόνο το 0 θα μπορούσε να έχει αυτή την ιδιότητα και στο 0 δεν παραγωγίζεται.

αν υπήρχε τέτοιο x_0, θα έπρεπε να είναι $x_0=0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

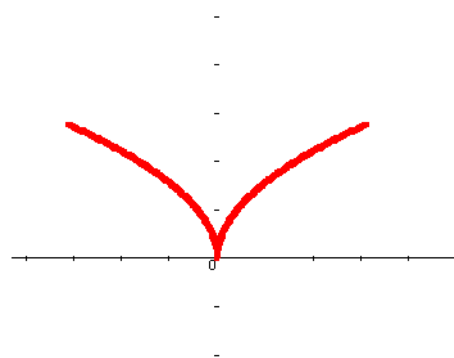
Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[1,2) \\ 1, & x=2 \end{cases}$ τότε

- Η f ασυνεχής στο 2, και συνεχής παντού αλλού.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1)=f(2)=1$.

Όμως, $\nexists\ x_0\in(0,1): f'(x_0)=0$, διότι αν υπήρχε κάποιο, θα ήταν το 0 και $0\notin(1,2)$.

(iv) Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.

Αν $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\in[0,1] \\ -\sqrt{|x|} & x=[-1,0) \end{cases}$ τότε

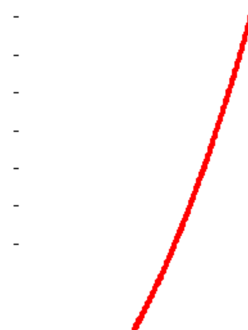


- Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.
- $f(1)=f(-1)=1$.
- Η f δεν είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (-1,1) : f'(x_0) = 0$, (διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο, καταλήγουμε σε άτοπο).

(v) Η συνθήκη $f(\alpha) = f(\beta)$ είναι απαραίτητη.

Αν $f(x) = x^2 / [1,2]$, τότε



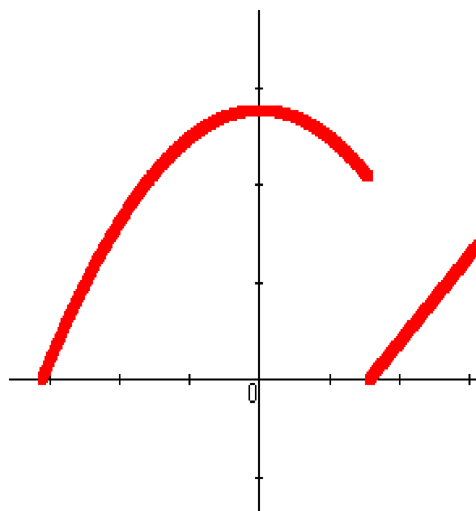
- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1) = 1 \neq 4 = f(2)$.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (1,2) : f'(x_0) = 0$, διότι θα έπρεπε $2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin (1,2)$.

(vi) Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Θα δώσουμε παράδειγμα όπου δεν ικανοποιείται **καμία** συνθήκη του Θ. Rolle, όμως $\exists\ x_0 \in (\alpha, \beta)\ :\ f'(x_0) = 0$.

Θεωρώ την

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \\ x - \frac{1}{2}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$



- Η f είναι ορισμένη στο $[-1,1]$.
- Η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$, αφού στο $x_0 = \frac{1}{2}$ έχω ασυνέχεια.
- Η f, ως μη συνεχής στο $x_0 = \frac{1}{2}$ δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

Όμως, $\exists\ x_0 = 0 \in (-1,1)\ :\ f'(0) = 0$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Μπορούν δύο συναρτήσεις με ίδια αναλυτική έκφραση να έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας;

Απάντηση: Είναι δυνατόν, εάν ορίζονται σε διαφορετικά σύνολα.

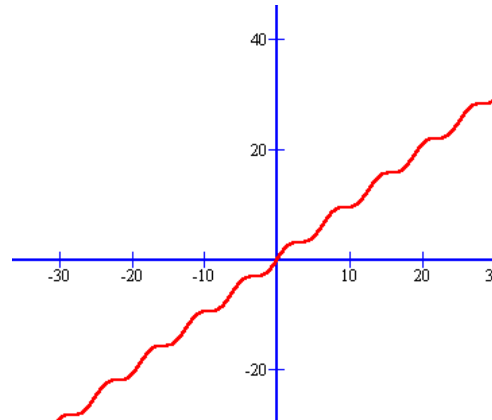
Π.χ. η $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα,

ενώ η $g : (0,-\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα.

«Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα σε αυτό, τότε $f'(x) > 0 \ \forall x \in \Delta$».
Να αποδείξετε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

Απάντηση: π.χ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ, όμως $f'(0) = 0$.

Μάλιστα, είναι δυνατόν, μια συνάρτηση, να έχει άπειρα σημεία στα οποία να μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της και αυτή να είναι γνησίως αύξουσα. Παράδειγμα είναι η $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \eta\mu x$. Η f είναι γνησίως αύξουσα.



Όμως $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ και η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow (x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z})$.
Δηλαδή, έχω άπειρες αριθμήσιμες τιμές για τις οποίες $f'(x) = 0$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα.

<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Το αντίστροφο της ανωτέρω προτάσεως, είναι η γνωστή αληθής πρόταση.

Υπάρχει συνάρτηση της οποίας κάθε σημείο να είναι ολικό μέγιστο και ταυτοχρόνως ολικό ελάχιστο;

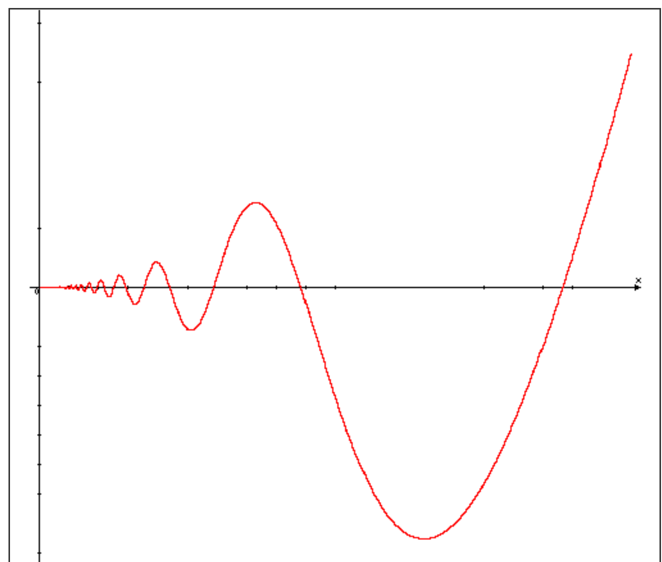
Απάντηση: Η σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ πληροί την τεθείσα συνθήκη, αφού αν $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = c \le c = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(x_0) = c \ge c = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Υπάρχει συνάρτηση f:[4]
- **Ορισμένη στο $[\alpha, +\infty)$ και συνεχής**
- **Στο α δεν έχει τοπικό ακρότατο.**

Απάντηση: Θεωρούμε την $f:[0+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθετη συνεχών.
Επίσης στο 0 είναι συνεχής, αφού $f(0) = \lim_{x \to 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0$ ως γινόμενο απειροστής επί φραγμένη. Όμως το $f(0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο, αφού οσοδήποτε κοντά στο 0, σε



$f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

[4] Η μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης, είναι εκτός πνεύματος ύλης της Γ΄ Λυκείου, αλλά χρειάζεται στα επόμενα για άρση μιας συνήθους πλάνης για τα ακρότατα.

κάθε διάστημα της μορφής $[0,x]$ η $f(x)$ εναλλάσσει πρόσημο, δηλαδή γίνεται και θετική και αρνητική, συνεπώς η τιμή 0 δεν μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο.

Ο παραπάνω ισχυρισμός καθίσταται φανερός, αν θεωρήσω την ακολουθία $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας, έπεται, ότι σε κάθε διάστημα της μορφής (0,ε), υπάρχουν άπειροι όροι της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτές τις άπειρες τιμές είναι $f(x_n) = x_n^2 \cdot 1 = x_n^2 > 0$.

Αν θεωρήσω $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \to 0$ και $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε και αυτή σε διάστημα (0,ε), έχει άπειρους όρους της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτούς τους όρους είναι $f(y_n) = y_n^2(-1) = -y_n^2 < 0$.

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο 0, έχω και θετικές τιμές και αρνητικές τιμές, άρα το 0 δεν μπορεί να είναι ακρότατο

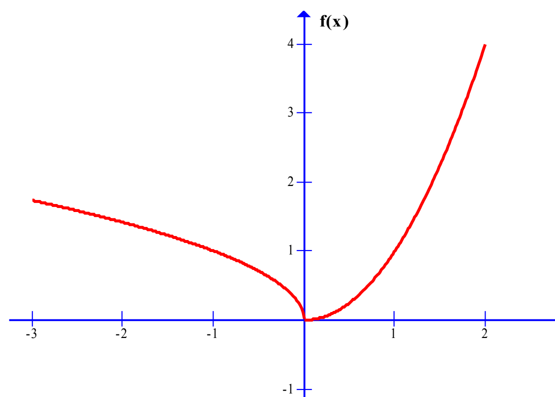
Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, εκατέρωθεν σημείου x_0 της οποίας, να γίνεται αλλαγή κυρτότητας, αλλά στο x_0 να μην έχω σημείο καμπής .

Απάντηση: Θεωρώ την $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Στο $x_0 = 0$ η κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού $f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ (δεν υπάρχει η $f''(0)$, αφού δεν υπάρχει και η $f'(0)$) και $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, ενώ $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Στο $x_0 = 0$ έχω $f'_\alpha(0) = -\infty$ και $f'_\delta(0) = 0$.

Έτσι, στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το $x_0 = 0$ δεν είναι σημείο καμπής.



Υπάρχει περίπτωση, εκατέρωθεν ενός σημείου x_0, μια συνάρτηση f να έχει αλλαγή κυρτότητας και x_0 να μην είναι σημείο καμπής διότι το $x_0 \notin \mathcal{D}(f)$.

Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x} / \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ και $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$, $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, ενώ δεν υπάρχει σημείο μηδενισμού της β′ παραγώγου.

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Απάντηση: Αν $f(x)=x+συν^2x/\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+συν^2x}{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{συν^2x}{x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1+συν2x}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{συν2x}{2x}$$

$=1+0+0=1$

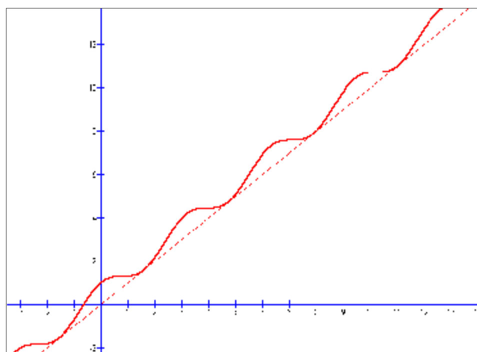
Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}συν^2x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε

$\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2 2n\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}1^2=1$,

ενώ αν

$y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε

$\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$. Δηλ. στο $+\infty$ η συνάρτηση $συνx^2$, κυμαίνεται συνεχώς μεταξύ του 1 και του 0, χωρίς να πλησιάζει πουθενά.



Είναι δυνατόν ασύμπτωτη καμπύλης να τέμνει την καμπύλη;

Απάντηση: Πρόκειται για ενδιαφέρον παιδαγωγικό (και μαθηματικό) ερώτημα, καθώς η ετυμολογική σημασία της λέξης «ασύμπτωτη» παραπέμπει ευθέως στην «μη σύμπτωση» και (κατά τη συνήθη ερμηνεία) στο ότι «δεν έχουν κοινά σημεία».

Από την άλλη, η μαθηματική σημασία του όρου, δεν αποκλείει την ύπαρξη κοινών σημείων, αλλά και αυτό δεν είναι προφανές αν γίνει μια όχι σωστή γεωμετρική μετάφραση του ορισμού (πράγμα λίαν σύνηθες).

Ο ορισμός της πλάγιας ασύμπτωτης, απαιτεί ύπαρξη $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x+\mu]=0. \qquad (1)$$

Η συνήθης λανθασμένη γεωμετρική θεώρηση του ορισμού έγκειται στην εξής μετάφραση: « Η (1) σημαίνει ότι η $f(x)$ και η ευθεία $y=\lambda x+\mu$ εφάπτονται στο άπειρο ή πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά χωρίς να συμπίπτουν ποτέ».

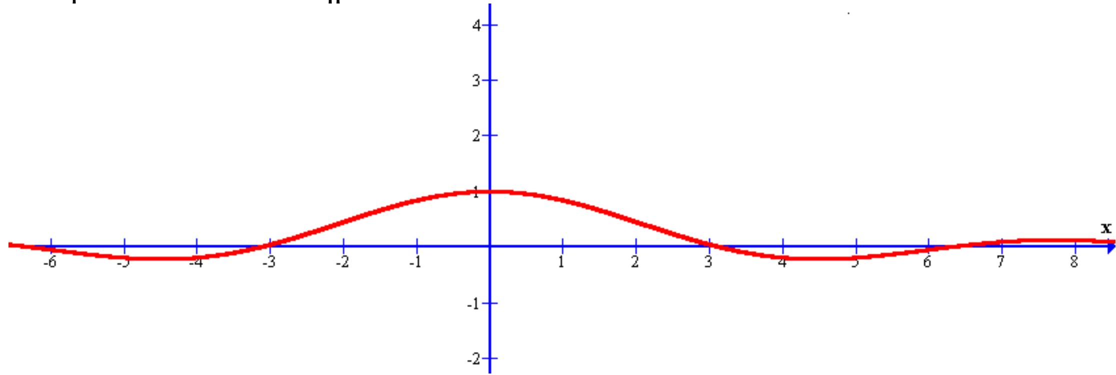
Η παραπάνω θεώρηση είναι σωστή για την συντριπτική πλειονότητα των **χρησιμοποιούμενων** παραδειγμάτων ή περιπτώσεων, **αλλά όχι και για όλα.**

Παραθέτουμε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

$f(x)=\begin{cases}\frac{ημx}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ η οποία είναι συνεχής.

Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ευθεία y=0 (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f(x)$.

Όμως η $f(x)$ και ο άξονας xx' έχουν άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία, αφού η εξίσωση $\frac{\eta\mu x}{x}=0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow (x=\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{R})$ και έτσι φαίνεται η απειρία των κοινών σημείων.



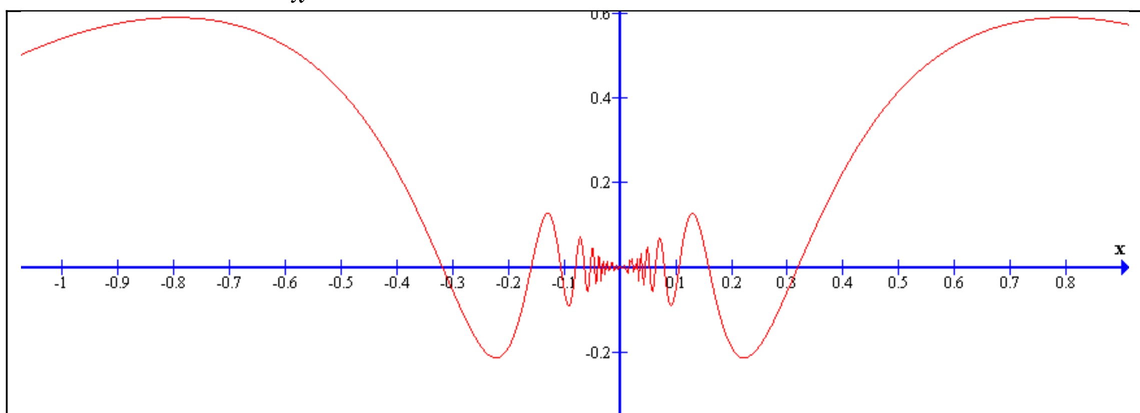
Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu(\chi)}{\chi}$ έχει την μορφή μιας αποσβενυόμενης φθίνουσας ταλάντωσης και προς το $+\infty$ και προς το $-\infty$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L'HOSPITAL

Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να μην υπάρχει το $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ και να υπάρχει το $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Απάντηση: Το $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)}{\varepsilon\phi(\chi)}$ **σε μια περιοχή του μηδενός, όπου και εποπτικά φαίνεται η ύπαρξη του ορίου.**

Όμως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=0-\frac{\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

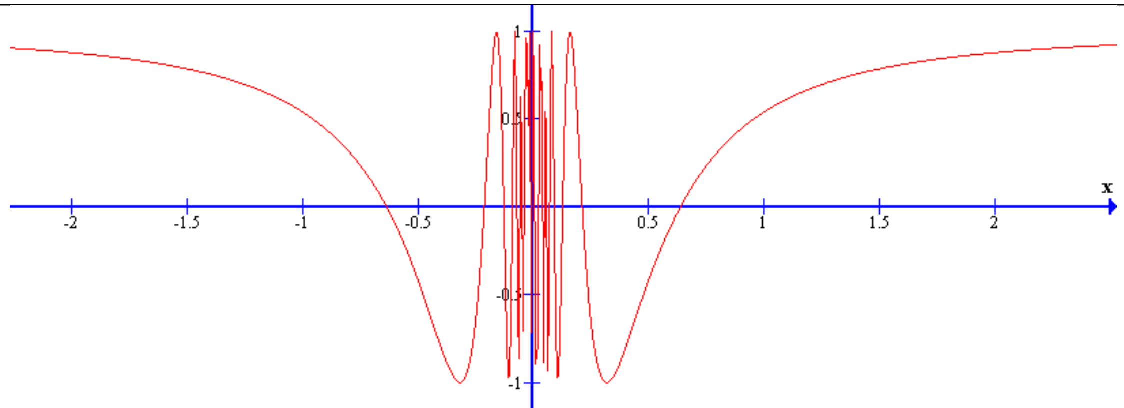
και το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Πράγματι,

αν $x_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0$ και $x_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n}=\lim\sigma\upsilon\nu 2\pi n=1\to 1$.

Αν $x_n'=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to 0$ και $x_n'\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n'}=\lim\sigma\upsilon\nu\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=$ $0\to 0$.

Επομένως δεν υπάρχει το όριο του $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ όταν $x\to 0$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=συν(1/χ) **. Εποπτικά έχουμε μια γραμμή που ταλαντώνεται μεταξύ του 1- και 1 όσο πλησιάζουμε στο 0 , χωρίς όμως να σταθεροποιείται σε κάποια συγκεκριμένη τιμή.**

ΣΧΟΛΙΟ: Το παράδειγμα αναδεικνύει το ικανό και όχι το αναγκαίο του κανόνα L'Hopsital. Επομένως, όταν δεν υπάρχει η οριακή τιμή του λόγου των παραγώγων, δεν έπεται ότι δεν υπάρχει και το αρχικό προς υπολογισμό όριο.

Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί το ψεύδος της παρακάτω προτάσεως:

«Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ **τότε και** $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$**».**

<u>Απάντηση:</u> Θεωρώ $f(x)=x$, $g(x)=x+1$.

Τότε, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{0}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1}=1\neq 0$.

Επομένως η πρόταση είναι ψευδής. Όπως δείξαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αληθής γενικά είναι η αντίστροφη πρόταση.

Αόριστη Ολοκλήρωση.

Το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{1}{x}dx$, δεν μπορεί να υπολογισθεί με παραγοντική ολοκλήρωση, διότι οδηγεί στην αντίφαση 1=0, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$I=\int \frac{1}{x}dx=\int x'\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\frac{1}{x}-\int x d\frac{1}{x}=1-\int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=1=1+\int\frac{1}{x}dx=1+I.$$

Άρα, $I=1+I\to 1=0(!)$

Υπάρχει κάποιο λάθος στα παραπάνω;

<u>Απάντηση</u>: Το λάθος στο παραπάνω είναι η παράληψη της σταθεράς ολοκλήρωσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η παράληψη δεν δημιουργεί πρόβλημα, αλλά σπανίως (όπως εδώ) μπορεί να δημιουργήσει αντίφαση.

Η τελική ισότητα θα ήταν $I=1+C+I$ που δεν συνιστά αντίφαση.

Να σημειωθεί., ότι δεν είναι το μόνο λάθος που μπορεί να προκύψει όταν δεν είμαστε προσεκτικοί στην παράθεση της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα «αποδείξουμε», ότι η γνωστή θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$ δεν … ισχύει!.

Έχουμε: $\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx=\frac{1}{2}\eta\mu^2 x$ (1)

Αλλά και $\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$ (2).

Με απλή παραγώγιση των δευτέρων μελών των (1) και (2) μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση.

Έτσι από (1) και (2) έχω $\frac{1}{2}\eta\mu^2 x=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x$ ή

$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=0$ (!!!)

Το σωστό είναι οι (1) και (2) να γράφονται

$\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\eta\mu^2 x+C$

$\int \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x+C'$

Με άλλα λόγια, το σύμβολο $\int f(x)dx$, όταν υπάρχει, δεν συμβολίζει μία συνάρτηση, αλλά ένα σύνολο συναρτήσεων που διαφέρουν κατά σταθερά C. Συνεπώς όταν είναι γνωστή μία <u>συγκεκριμένη</u> $F_{(x)}$ αρχική της $f(x)$ γράφουμε: $\int f(x)dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Όταν υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε τον τύπο των Newton-Leibniz: $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha)$, όπου η f συνεχής και $F : F'(x) = f(x)$ σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Επιπλέον, πρέπει η F, να είναι συνεχής, παντού στο $[\alpha, \beta]$.
Η συνθήκη η τελευταία είναι απολύτως αναγκαία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παραδείγματα;

Απάντηση: α) Ισχύει $\left(\frac{1}{2} \text{τοξεφ} \frac{2x}{1 - x^2} \right)' = \frac{1}{1 + x^2}$, $x \neq 1$.

Τότε $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \text{τοξεφ} \frac{2x}{1 - x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ *βγαίνει δηλαδή το παράδοξο αποτέλεσμα αρνητικού ορισμένου ολοκληρώματος, μιας συνάρτησης παντού θετικής στο διάστημα ολοκλήρωσης*. Το λάθος βεβαίως είναι ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{2} \text{τοξεφ} \frac{2x}{1 - x^2}$ δεν ορίζεται για $x = 1 \in [0, \sqrt{3}]$. Η σωστή λύση είναι η εξής:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \text{τοξεφ} x \frac{2x}{1 - x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} \text{τοξεφ}\sqrt{3} - \text{τοξεφ} 0 = \frac{\pi}{3}.$$

β) Ένα απλούστερο παράδειγμα: Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ και $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \end{Bmatrix}$, τότε, προφανώς $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (0,1)$,

$F(1) - F(0) = \ -1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 1$. Αυτό βέβαια οφείλεται στο ότι η F δεν είναι συνεχής για $x = 0$ και για $x = 1$.

γ) Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{4 + \text{συν} x}$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού θετική, αφού $4 + \text{συν} x \geq 3\ \forall x \in \mathbb{R}$. Αν αντικαταστήσω το x, θέτοντας

$$\text{εφ} \frac{x}{2} = \omega \qquad (1)$$

τότε

$$\text{συν} x = \frac{1 - \text{εφ}^2 \frac{x}{2}}{1 + \text{εφ}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \qquad (2)$$

Διαφορίζοντας την (1) έχω:

$$d\left(\text{εφ} \frac{x}{2} \right) = d\omega \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\text{συν}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow$$ (από τον τύπο του αποτετραγωνισμού του συνημιτόνου)

$$\frac{2}{1+\text{συν}x}\cdot\frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow \quad ((2))$$

$$\frac{dx}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = d\omega \Rightarrow$$

$$dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}.$$

Έτσι, το αρχικό ορισμένο ολοκλήρωμα, γίνεται:

για $x = 0$, λόγω (1) έχω $\text{εφ}\frac{0}{2} = 0$,

για $x = 4\pi$, λόγω (1) έχω $\omega = \text{εφ}\frac{4\pi}{2} = 0$.

Άρα, $\int_0^{4\pi}\frac{dx}{4+\text{συν}x} = \int_0^0 \frac{1}{4+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}}\cdot\frac{2}{1+\omega^2}d\omega = 0$ (!).

Δηλαδή, το ορισμένο ολοκλήρωμα παντού θετικής συνάρτησης, είναι μηδέν! Φυσικά το λάθος προεκλίθη, στην αντικατάσταση, αφού η συνάρτηση $\text{εφ}\frac{x}{2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4\pi]$.